

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 – 05 – 2016

*ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ*

Θέμα Α

- A1*** Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 262.
- A2*** Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 141.
- A3*** Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 246 με 247.
- A4*** α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Θέμα Β

B1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Επιλύουμε τυχαία

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \stackrel{(x^2+1)^2 > 0}{\Rightarrow} 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\circ	$+$
$f(x)$	\searrow	$ $	\nearrow

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} τότε:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- το $x_0 = 0$ είναι η θέση ελαχίστου με $f_{\min} = f(0) = 0$.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f'} = \mathbb{R}$ ως ρητή με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x \left[(x^2+1)^2 \right]'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2(3x^2 - 1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Επιλύουμε τυχαία $f''(x) > 0 \stackrel{(x^2+1)^3 > 0}{\Rightarrow} -2(3x^2 - 1) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 < 0$

$$\Rightarrow 3x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Προκύπτει ο πίνακας προσήμου της f'' .

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	o	+	o	-
$f(x)$	↘		↗		↘

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, τα σημεία

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right), \text{ δηλαδή } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right), \text{ δηλαδή } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

B3. Από το D_f προκύπτει ότι θα αναζητηθούν οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

Αναζήτηση στο $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.

Αναζήτηση στο $-\infty$

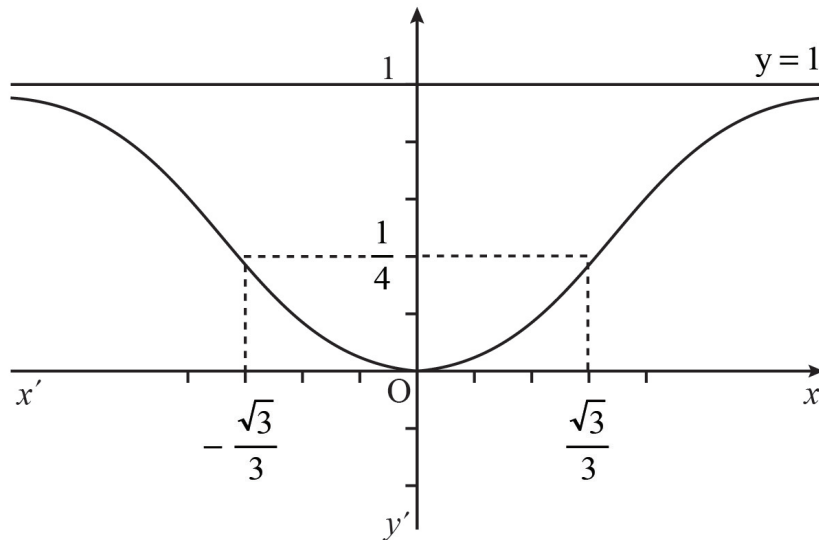
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 1$.

B4. Από τις απαντήσεις των ερωτημάτων B₁, B₂, B₃ προκύπτει ο πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
f'(x)	-	-	○	+	+	
f''(x)	-	○	+	+	○	-
f(x)	↘	↘	↗	↗	↗	



Θέμα Γ

Γ1. Η $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανής ρίζα την $x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Θεωρούμε

$h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R} με

$$h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	○	+
$e^{x^2} - 1$	+	○	+
$h'(x)$	-	○	+
$h(x)$	↘ ↗		

Εξ' ορισμού ελαχίστου $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) \geq h(0) \Rightarrow h(x) \geq 0$. Άρα $x_0 = 0$ μοναδική διπλή ρίζα.

Γ2. Γνωρίζουμε ότι $|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| \Rightarrow |f(x)| = |h(x)| \stackrel{h(x) \geq 0}{\Rightarrow} \stackrel{\forall x \in \mathbb{R}}{}$

$|f(x)| = h(x)$ οπότε $f(x) = h(x)$ ή $f(x) = -h(x)$

δηλαδή $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ή $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Γ3. Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)' = 2x(e^{x^2} - 1)$ αφού η f είναι

παραγωγίσιμη ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η $f'(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 2x \cdot 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} - 2 + 4x^2e^{x^2} = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 =$$

$$4x^2e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) \geq 0$$

Άρα η f είναι κυρτή $\forall x \in \mathbb{R}$ και f' γνησίως αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε $g(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} αφού η $f(x+3)$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R} και η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = f'(x+3) \cdot (x+3)' - f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

Γνωρίζουμε ότι $x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ και η $g(x)$ είναι συνεχής άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η g είναι “1-1” στο \mathbb{R} .

Από εκφώνηση $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$

$$\Rightarrow g(|\eta\mu x|) = g(x) \Rightarrow |\eta\mu x| = x$$

$$\stackrel{x>0}{\Rightarrow} |\eta\mu x| = x$$

και σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο (σελίδα 170) προκύπτει ότι $x = 0$.

Θέμα Δ

$$\begin{aligned}
 \Delta 1 \quad & \int_0^\pi f(x)\eta\mu x \, dx + \int_0^\pi f''(x)\eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow \\
 & \int_0^\pi f(x)\eta\mu x \, dx + \int_0^\pi (f'(x))' \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow \\
 & \int_0^\pi f(x)\eta\mu x \, dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow \\
 & \int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow \\
 & [f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow \\
 & f(\pi) + f(0) + f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 = \pi \Rightarrow \\
 & f(\pi) = \pi \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1 \text{ οπότε } f(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 1$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\text{Θεωρούμε } u(x) = \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} \text{ για } x \neq 0 \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

$$\text{τότε } \frac{f(x) - f(0)}{x} = u(x) \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[u(x) \frac{\eta\mu x}{x} \right] \Rightarrow$$

$$f'(0) = 1 \cdot 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Δ2

α) Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η $f(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Καθώς και η e^x , $f(x)$ είναι παραγωγίσιμες τότε $e^{f(x)}$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα $e^{f(x)} + x$ και η $f(f(x)) + e^x$ είναι παραγωγίσιμες οπότε παραγωγίζουμε

$$\text{την ισότητα } (e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)'$$

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x$$

Έστω ότι υπάρχει x_0 εσωτερικό του \mathbb{R} τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ (1)

Άρα για $x = x_0$: $e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0}$

$$\Rightarrow 1 = e^{x_0} \Rightarrow x_0 = 0$$

όμως $f'(0) = 1$ από ερώτημα Δ1 είναι **Άτοπο**

Αφού από σχέση (1) είναι $f'(0) = 0$

β)

Αφού η παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο σημαίνει $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ και ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f'(0) = 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής οπότε f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3

Αφού η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και συνεχής γνωρίζουμε ότι

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Οπότε αν $\lambda(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$, $D_\lambda = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ και

$$|\lambda(x)| = \left| \frac{1}{f(x)} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| |(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \lambda(x) \leq 2 \left| \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 \left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = -2 \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} \right| = -2 \cdot 0 = 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 2 \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} \right| = 2 \cdot 0 = 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 0$

Δ4 $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$

Θέτουμε $u = \ln x$

• $x = 1$ του $u = 0$

$x = e^\pi$ του $u = \pi$

• $du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$

Άρα $I = \int_0^\pi f(u) du$

Επίσης, από $0 < u < \pi$

$$\begin{aligned} & \uparrow \\ & \Rightarrow f(0) < f(u) < f(\pi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < f(u) < \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi 0 du < I < \int_0^\pi \pi du$$

$$\Rightarrow 0 < I < \pi [u]_0^\pi$$

$$\Rightarrow 0 < I < \pi (\pi - 0)$$

$$\Rightarrow 0 < I < \pi^2$$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

Αξιολόγηση θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια και με κλιμακούμενη δυσκολία.